

ISEN
NANTES

Date
23/09/2025

DS
n° 1
Matière
Mathématiques
Durée
1h30

Classe
CIR/CENT 1
Sujet
Nombres complexes
Enseignante
Florence LOUAZEL

CORRECTION SUJET

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
Points:	2	2	4	1½	1	3	4	1	1½	0	0	20
Bonus Points:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	½	1½	2

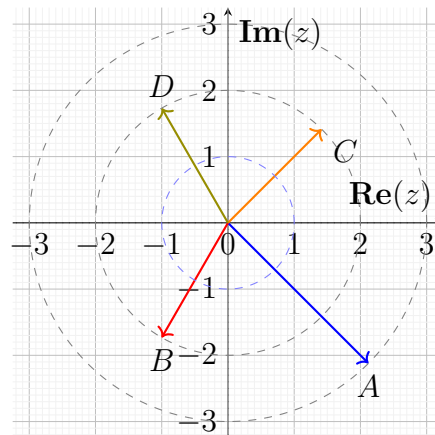
Exercice 1.

1. (2 points) Dans le plan complexe, placer les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = 3e^{-\frac{\pi}{4}i}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$, $z_C = -2e^{\frac{5i\pi}{4}}$ et $z_D = \overline{z_B}$.

Solution: Méthode :

- Écrire les nombres complexes sous forme exponentielle.
- Tracer le cercle trigonométrique et positionner tous les arguments des nombres complexes dessus.
- Tracer des cercles de rayons correspondant aux modules de chaque nombre complexe.
- Prolonger les traits sur le cercle du rayon correspond au module du nombre complexe.
- Identifier chaque point par une lettre.

$$z_B = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}, z_C = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_D = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$



Exercice 2.

2. (2 points) Résoudre l'équation

$$(3 - 5i)z + 5 - 4i = iz$$

On exprimera le résultat sous forme algébrique.

Solution:

$$z = -\frac{13}{15} - \frac{2}{5}i$$

$$(3 - 5i)z + 5 - 4i = iz$$

$$3z - 5iz - iz = -5 + 4i$$

$$3z - 6iz = -5 + 4i$$

$$3(1 - 2i)z = -5 + 4i$$

$$z = \frac{1}{3} \times \frac{-5 + 4i}{1 - 2i}$$

$$z = \frac{1}{3} \times \frac{(-5 + 4i)(1 + 2i)}{5}$$

$$z = \frac{1}{15}(-5 - 10i + 4i - 8)$$

$$z = \frac{1}{15}(-13 - 6i)$$

$$z = -\frac{13}{15} - \frac{2}{5}i$$

$$z = -\frac{13}{15} - \frac{2}{5}i$$

Exercice 3.

3. (4 points) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{C}$: (S)
$$\begin{cases} (2 + i)z + (1 - i)u &= -6 - 2i \\ (1 - 2i)z + (3 + i)u &= -10 - 8i \end{cases}$$

Solution:

$$\begin{cases} z &= -1 - i \\ u &= -3 - 2i \end{cases}$$

Solution:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} [(2+i)z + (1-i)u](3+i) = (-6-2i)(3+i) & L_1 \leftarrow (3+i)L_1 \\ [(1-2i)z + (3+i)u](1-i) = (-10-8i)(1-i) & L_2 \leftarrow (1-i)L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (6+2i+3i-1)z + (3+i-3i+1)u = -18-6i-6i+2 \\ (1-i-2i-2)z + (3-3i+i+1)u = -10+10i-8i-8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5+5i)z + (4-2i)u = -16-12i \\ (-1-3i)z + (4-2i)u = -18+2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5+5i+1+3i)z = -16-12i+18-2i & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ (-1-3i)z + (4-2i)u = -18+2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(3+4i)z = 2(1-7i) \\ (4-2i)u = -18+2i + (1+3i)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1-7i}{3+4i} \\ u = \frac{-18+2i + (1+3i)z}{2(2-i)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{25}(1-7i)(3-4i) \\ u = \frac{-18+2i + (1+3i)z}{2(2-i)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{25}(3-4i-21i-28) \\ u = \frac{-18+2i + (1+3i)z}{2(2-i)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{25}(-25-25i) \\ u = \frac{-18+2i + (1+3i)z}{2(2-i)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1-i \\ u = \frac{-18+2i + (1+3i)(-1-i)}{2(2-i)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1-i \\ u = \frac{-18+2i-1-i-3i+3}{2(2-i)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1-i \\ u = \frac{-2(8+i)}{2(2-i)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1-i \\ u = \frac{-(8+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1-i \\ u = -\frac{1}{5}(16+8i+2i-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1-i \\ u = -\frac{1}{5}(15+10i) = -3-2i \end{cases}$$

Exercice 4.

4. ($1\frac{1}{2}$ points) Sans calculs (mais en justifiant), déterminer si les nombres suivants sont réels ou imaginaires purs :

$$z_1 = \frac{(1-i)(5+3i)}{(1+7i)(2+4i)} + \frac{(1+i)(5-3i)}{(1-7i)(2-4i)}$$

$$z_2 = \frac{(1-i)(5+3i)}{(1+7i)(2+4i)} - \frac{(1+i)(5-3i)}{(1-7i)(2-4i)}$$

$$z_3 = \frac{(1-i)(5+3i)}{(1+7i)(2+4i)} \times \frac{(1+i)(5-3i)}{(1-7i)(2-4i)}$$

Solution: Méthode :

- Poser z et déduire $\bar{z}$.
- Citer les propriétés du cours avec la rigueur nécessaire.
- Conclure.
- On pose $z = \frac{(1-i)(5+3i)}{(1+7i)(2+4i)}$ et $\bar{z} = \frac{\overline{(1-i)(5+3i)}}{\overline{(1+7i)(2+4i)}} = \frac{(1+i)(5-3i)}{(1-7i)(2-4i)}$

$$\text{car } \forall (Z, Z') \in \mathbb{C}^2, \overline{ZZ'} = \bar{Z} \times \bar{Z'} \text{ et si } Z' \neq 0, \frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}} = \frac{Z}{Z'}$$

- Pour z_1 : $z_1 \in \mathbb{R}$

D'après le cours $\forall z \in \mathbb{C}, z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$

- Pour z_2 : $z_2 \in i\mathbb{R}$

D'après le cours $\forall z \in \mathbb{C}, z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

- Pour z_3 : $z_3 \in \mathbb{R}$

D'après le cours $\forall z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) = \text{Re}(\bar{z})$ et $\text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (\text{Re}(z) + i\text{Im}(z))(\text{Re}(z) - i\text{Im}(z)) \\ &= \text{Re}(z)^2 - \cancel{i\text{Re}(z)\text{Im}(\bar{z})} + \cancel{i\text{Re}(\bar{z})\text{Im}(z)} + \text{Im}(z)^2 \\ &= \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2 \end{aligned}$$

Exercice 5. Soient $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -1 + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ des nombres complexes.

5. (1 point) Écrire z_3 sous forme algébrique.

Solution:

$$z_3 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i$$

Méthode :

- Partir des informations de l'énoncé : $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

- Observer qu'il y a un nombre complexe au dénominateur et utiliser la propriété $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, z\bar{z} = a^2 + b^2$ pour transformer le nombre complexe.
- Identifier clairement la partie réelle du complexe obtenu et la partie imaginaire.

Solution:

$$\begin{aligned}
 z_3 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{-1 + i} \\
 &= \frac{(-1 + i\sqrt{3})(-1 - i)}{(-1 - i)(-1 + i)} \\
 &= \frac{(-1 + i\sqrt{3})(-1 - i)}{(-1)^2 + 1^2} \\
 &= \frac{(-1 + i\sqrt{3})(-1 - i)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} (1 + i - i\sqrt{3} + \sqrt{3}) \\
 &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i
 \end{aligned}$$

6. (3 points) Écrire z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique, puis exponentielle.

Solution: Méthode :

- Donner les formules générales pour la forme trigonométrique et exponentielle.
- Pour z_1 et z_2 calculer leurs modules et leurs arguments.
- Conclure pour z_1 et z_2 .
- Observer que $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.
- Citer les propriétés du cours.
- Conclure.

Solution: Soit $z \in \mathbb{C}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, z = a + ib$.

Forme trigonométrique : $z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \arg(z)$

donc
$$\begin{cases} \cos \theta &= \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta &= \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

Forme exponentielle : $z = |z| e^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
|z_1| &= |-1 + i\sqrt{3}| & \cos \theta_1 &= \frac{-1}{|z_1|} & \sin \theta_1 &= \frac{\sqrt{3}}{|z_1|} \\
&= \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} & &= \frac{-1}{2} & &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 2 & \theta_1 &= \frac{2\pi}{3} & \theta_1 &= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\begin{aligned}
|z_2| &= |-1 + i| & \cos \theta_2 &= \frac{-1}{|z_2|} & \sin \theta_2 &= \frac{1}{|z_2|} \\
&= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} & &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} & &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \sqrt{2} & \theta_2 &= \frac{3\pi}{4} & \theta_2 &= \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\begin{aligned}
|z_3| &= \left| \frac{z_1}{z_2} \right| & \arg(z_3) &= \frac{\arg(z_1)}{\arg(z_2)} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|} & &= \arg(z_1) - \arg(z_2) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} & &= \frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} \\
&= \sqrt{2} & &= -\frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

7. (4 points) Déterminer la forme algébrique de z_3^{1800} .

Indication : $1800 = 150 \times 12$

Solution: Méthode :

- Point de départ, forme exponentielle de z_3 .
- Simplifier avec la propriété $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (e^a)^n = e^{an}$.
- Passer par la forme trigonométrique.

- Noter que 150π correspond à 75 tours complets de cercle trigonométrique.
- Conclure.

Solution:

$$z_3 = 2^{900}$$

$$\begin{aligned}
 z_3 &= \left(\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{12}i} \right)^{1800} \\
 &= \sqrt{2}^{1800} e^{-1800 \times \frac{\pi}{12}i} \\
 &= (2^{1/2})^{1800} e^{-150 \times 2 \times \frac{\pi}{12}i} \\
 &= 2^{900} e^{-150\pi i} \\
 &= 2^{900} (\cos(-150\pi) + i \sin(-150\pi)) \\
 &= 2^{900} (\cos(150\pi) - i \sin(150\pi)) \text{ car fonction cos pair et sinus impair} \\
 &= 2^{900} (\cos(2\pi \times 75) - i \sin(2\pi \times 75)) \\
 &= 2^{900} (\cos(0) - i \sin(0)) \text{ car } 75 \equiv 0[2\pi] \\
 &= 2^{900} (1 + 0i) \\
 &= 2^{900}
 \end{aligned}$$

Exercice 6. Transformation de Cayley Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

8. (1 point) Factoriser les nombres $z_1 = e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ et $z_2 = 1 + e^{i\theta}e^{i\theta'}$ par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.

Solution: Méthode de l'angle moitié : voir exemple cours ou TD et formules d'Euler

$$\begin{aligned}
 z_1 &= e^{i\theta} + e^{i\theta'} \\
 &= e^{i\frac{\theta+\theta'+\theta'-\theta'}{2}} + e^{i\frac{\theta'+\theta'+\theta-\theta}{2}} \\
 &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}} \\
 &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}} \right) \\
 &= 2 \cos \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= 1 + e^{i\theta} e^{i\theta'} \\
&= e^{i\frac{\theta+\theta'-\theta-\theta'}{2}} + e^{i(\theta+\theta')} \\
&= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}} + e^{i\frac{\theta+\theta'+\theta+\theta'}{2}} \\
&= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}} + \left(e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \right)^2 \\
&= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}} \right) \\
&= 2 \cos \left(\frac{\theta + \theta'}{2} \right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}
\end{aligned}$$

Soient z et z' deux nombres complexes de module 1.

9. ($1\frac{1}{2}$ points) Démontrer que le nombre $\frac{z + z'}{1 + zz'}$ est un nombre réel, et préciser son module.

Solution:

- On sait que z et z' sont deux nombres complexes de module 1, ce sont des unimodulaires, il s'écrivent donc $z = e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\theta'}$.
- On remarque que $z + z' = z_1$ et $1 + zz' = z_2$.
- On pose $Z = \frac{z + z'}{1 + zz'}$.
- $Z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{z_1}{z_2} \\
&= \frac{2 \cos \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}{2 \cos \left(\frac{\theta + \theta'}{2} \right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}} \\
&= \frac{\cos \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\theta + \theta'}{2} \right)}
\end{aligned}$$

- $|Z| = \frac{\cos \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\theta + \theta'}{2} \right)}$

Questions bonus

10. ($\frac{1}{2}$ point (bonus)) Rappeler les formules d'Euler.
11. ($1\frac{1}{2}$ points (bonus)) Linéariser $\cos^4(x)$.